

Φυλλάδιο 6

Γεωμετρία

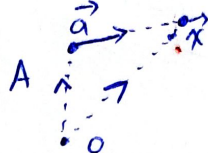
2/4/2019

- ① Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1,0,1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1,0,0)$

Λύση: Το τυχαίο σημείο $\vec{x}$ της ευθείας δίνεται από την εξίσωση

$$\vec{x} = \vec{OA} + t\vec{a}$$

$$\vec{x} = (1,0,1) + t(1,0,0)$$



• παραμετρικές

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

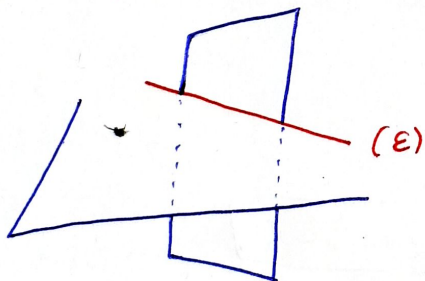
• αναλυτική εξίσωση

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-1}{0}$$

- ② Να βρεθεί ένα σημείο της ευθείας και ένα διάνυσμα παράλληλο προς την (E).

$$(L): \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 6x + 7y + 8z = 6 \end{cases}$$

Λύση:



Για να βρούμε ένα σημείο της ευθείας ως θέσαμε $z=0$ και να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 7y = 6 \end{cases}$$

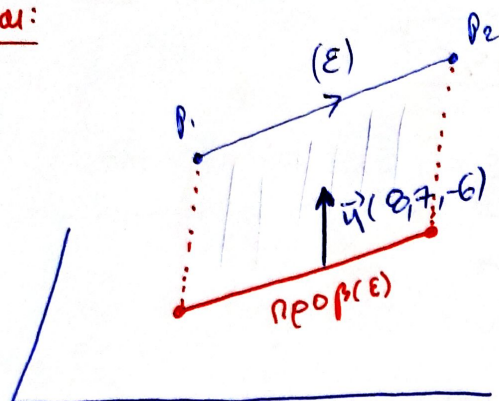
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -17/4 \\ y = 9/2 \end{cases} \quad z=0$$

Το εφ'απ'ό μιν διάνυσμα

$$\vec{n} = (2,3,1) \times (6,7,8) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (17, -10, -4)$$

- 4) Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(4, 5, 6)$ καθώς και η ορθή προβολή της στο επίπεδο $8x + 7y - 6z - 5 = 0$.

Λύση:



Ας βρούμε πρώτα την ευθεία που διέρχεται από τα P_1 και P_2 .

$$\vec{P_1P_2} = (4-1, 5-2, 6-3) = (3, 3, 3).$$

Είναι παράλληλο της (E) . Άρα η ευθεία έχει εξίσωση

$$(E): \boxed{\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}}$$

Τώρα πρέπει να βρούμε το επίπεδο όπου:

Η προβολή είναι η τομή του επιπέδου $(\Pi): 8x + 7y - 6z - 5 = 0$ με το επίπεδο $(\tilde{\Pi})$ που διέρχεται από τα P_1, P_2 και τέμνει κάθετα το επίπεδο (Π) .

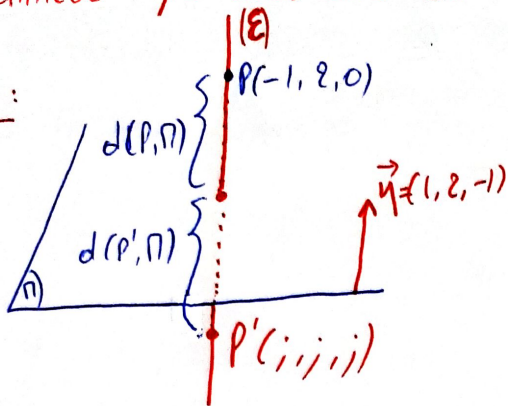
Το επίπεδο $(\tilde{\Pi})$ έχει εξίσωση.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 7 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{13x - 14y + z + 12 = 0}$$

Η προβολή έχει εξίσωση
$$\begin{cases} 8x + 7y - 6z - 5 = 0 \\ 13x - 14y + z + 12 = 0. \end{cases}$$

6) Να βρεθεί το αλγεβρικό του αμείνου $P(-1, 2, 0)$ ως προς την επιπέδο με αναστατική εξίσωση. $x + 2y - z + 1 = 0$.

Λύση:



Θα βρούμε την προβολή Q του P στο επίπεδο. Στην συνέχεια θα βρούμε το P' από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \vec{OP} + \vec{OP}' &= 2\vec{OQ} \\ \vec{OP}' &= 2\vec{OQ} - \vec{OP} \end{aligned}$$

Βρούμε Q :

Θα είναι το αμείο τομής της καθετής ευθείας προς το επίπεδο (π) που διέρχεται από το αμείο P .

Η ευθεία έχει εξίσωση

$$\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{u} = (-1, 2, 0) + t(1, 2, -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Το αμείο Q δίνεται από τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -1 + t + 2(2 + 2t) - (-t) + 1 &= 0 \\ -1 + t + 4 + 4t + t + 1 &= 0 \\ 6t &= -4 \end{aligned}$$

$$t = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$x = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$y = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

§ Σφαίρα

Ορισμός: Σφαίρα κέντρου K και ακτίνας R είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το K απόσταση R .



Έστω ότι $\vec{x}_K = (a, b, c)$ είναι το διάνομα θέσης του K .
Τότε:

• Διαφομετρική εξίσωση

$$\|\vec{x} - \vec{x}_K\| = R \quad (1)$$

• Κανονική εξίσωση

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (2)$$

• Αν κάνουμε τις πράξεις βγάλουμε ότι η εξίσωση

μπορεί να γραφεί

στη μορφή $\longrightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) λέγεται κανονική εξίσωση της σφαίρας

Θεώρημα

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$.

Τότε:

(i) Έστω

$$A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$$

τότε η εξίσωση δεν έχει λύση.

(ii) Εάν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta = 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει
αμείο.

(iii) Εάν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta > 0$ τότε η εξίσωση παριστάνει
σφαίρα με κέντρο το αμείο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2})$ και
ακτίνα $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}}{2}$.

Απόδειξη:

Θα κάνουμε αμείβωμαι τετραγώνων.

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2 \frac{A}{2}x + 2 \frac{B}{2}y + 2 \frac{\Gamma}{2}z + \Delta$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2 \frac{A}{2}x + 2 \frac{B}{2}y + 2 \frac{\Gamma}{2}z + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{\Gamma^2}{4} - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} - \frac{\Gamma^2}{4} + \Delta.$$

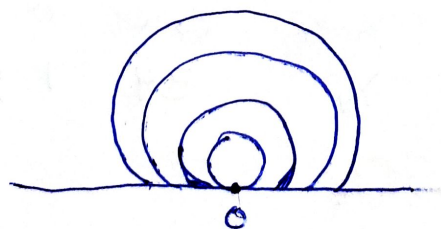
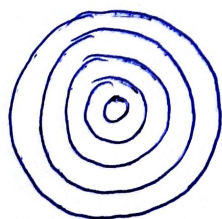
$$\Rightarrow 0 = (x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 + (z + \frac{\Gamma}{2})^2 - \frac{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}{4}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 + (z + \frac{\Gamma}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}{4}$$

Τα συμπεράσματα (i), (ii) και (iii) προκύπτουν άμεσα.

Παρατήρηση: Πολλές φορές ως εξίσωση της σφαίρας θα αναφέρεται
και η

$$C(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$



Θεώρημα:

Δίνονται 4 σημεία του χώρου τα οποία δεν είναι αλληλεπόμενα.

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$P_3(x_3, y_3, z_3)$$

$$P_4(x_4, y_4, z_4)$$

Τότε υπάρχει μία και μόνο σφαίρα που διέρχεται από αυτά τα 4 σημεία. Η εξίσωσή της είναι

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Απόδειξη: Αν αναπτύξουμε τον ορίσμο θα προκύψει μια εξίσωση της μορφής

$$\boxed{E(x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\Delta=0)} \quad (*)$$

Ο αριθμός E θα έχει τη μορφή.

$$E = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 & 0 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 & 0 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_4 \\ \rightarrow \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_4 \\ \rightarrow \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_4 \end{matrix}$$

$$= \langle \vec{p}_1 \vec{p}_4, \vec{p}_2 \vec{p}_4 \times \vec{p}_3 \vec{p}_4 \rangle \neq 0$$

Διότι τα αφεία είναι μη
αυτεπίπεδα. Επειδή η $\odot$ πληρείται
από τα p_1, p_2, p_3, p_4 έχει

4-ισοσκελές $\Rightarrow$ αλφες

ισοσκελές $\Rightarrow$ σφαίρα.